



Véges matematika – haladó

Javító zárthelyi 1.

2019. december 19.

A ZH-n semmilyen segédeszköz nem használható. Bizonyítás nélkül alkalmazható minden, az előadáson vagy a gyakorlaton bizonyított állítás, amennyiben azt pontosan kimondjátok. Minden feladat 10 pontot ér.

Emlékeztetőül, a Fibonacci-sorozat definíciója: $F_1 = F_2 = 1$, és $n \geq 3$ esetén $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. Mutasd meg, hogy tetszőleges $n \geq 2$ pozitív egész esetén

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) = n(n-1)2^{n-2}.$$

2. A Lucas-számokat a következő módon definiáljuk: $L_1 = 1, L_2 = 3$ és $n > 2$ esetén $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. Bizonyítsd be, hogy $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ tetszőleges $n, m > 0$ egészek esetén.
3. Owen bácsi és Beru néni farmja mellett egy 65 egyedből álló bantha-csorda legel: barnák, vörösek, feketék és tarkák. Igazoljuk, hogy ha nincsen öt különböző korú, azonos színű állat a csordában, akkor található benne három azonos színű, azonos nemű és egyidős bantha.
4. Hányféleképpen juthatunk el egy 21×21 -es sakktábla bal alsó sarkából a jobb felsőbe, ha csak jobbra és fel léphetünk egyet, és a sakktábla középső mezőjére nem léphetünk?
5. A Fejvadász Céh 20 (különböző) célpontját szeretné kiosztani 3 legjobb fejvadásza között úgy, hogy minden célpontot egy fejvadász kap, és mindegyik fejvadász legalább egy célpontot kapjon. Hányféleképpen tehetik ezt meg?
6. A véres geonosisi csata után egy klónszázad minden életben maradt katonája megállapította, hogy pont annyi barátja van még életben a századból, mint ahány darab foga maradt. (A barátságok kölcsönösek.) Bizonyítsd be, hogy van két klón, akiknek megegyezik a fogszáma.
7. A Halálcsillagon a szemétdobó kódja egy 6 számjegyből álló sorozat, amelynek nincs két egyforma szomszédos jegye. Hányféle ilyen kód van?