Véges matematika – haladó **1. zárthelyi** 2019. október 17.

A ZH-n semmilyen segédeszköz nem használható. Bizonyítás nélkül alkalmazható minden, az előadáson vagy a gyakorlaton bizonyított állítás, amennyiben azt pontosan kimondjátok. Minden feladat 10 pontot ér.

Emlékeztetőül, a Fibonacci-sorozat definíciója: $F_1 = F_2 = 1$, *és* $n \geq 3$ *esetén* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. Mutasd meg, hogy egy $2n+1$ elemű halmaz páratlan elemszámú részhalmazainak a száma 2^{2n}.
2. Hány olyan 10 hosszú karaktersorozat készíthető a (26 betűből álló) angol ábécé nagybetűiből, mely tartalmaz A-t, B-t és C-t is? *Tehát például a MATEMATBSC egy ilyen karaktersorozat.*
3. Egy szabályos 400-szög csúcsait megszíneztük úgy, hogy 99 kék színű és 301 pedig piros. Mutasd meg, hogy létezik olyan négyzet, melynek csúcsai a 400-szög csúcsai közül kerülnek ki és mind a négy csúcs azonos színű.
4. Mutasd meg, hogy tetszőleges n pozitív egész esetén
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \left(4^k(-2)^{n-k} - 1\right) \right) = 0.$$
5. Legyen X egy n elemű halmaz. Hányféleképpen választhatjuk ki $A, B \subseteq X$ nem feltétlenül különböző részhalmazait X-nek úgy, hogy $A \cup B = X$?
6. Bizonyítsd be, hogy ha egy 15 csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának foka 8 vagy 9, akkor vagy van legalább 8 kilencedfokú, vagy van legalább 9 nyolcadfokú csúcs.
7. Gábor kedvenc $G_1, G_2, \ldots$ sorozatáról elárulta, hogy $G_1 = x$, $G_2 = 1 + x$, továbbá $n \geq 3$ esetén $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$. Sőt még azt is elmondta, hogy $G_{100} = F_{102}$. Határozd meg x összes lehetséges értékét.

Véges matematika – haladó **1. zárthelyi** 2019. október 17.

A ZH-n semmilyen segédeszköz nem használható. Bizonyítás nélkül alkalmazható minden, az előadáson vagy a gyakorlaton bizonyított állítás, amennyiben azt pontosan kimondjátok. Minden feladat 10 pontot ér.

Emlékeztetőül, a Fibonacci-sorozat definíciója: $F_1 = F_2 = 1$, *és* $n \geq 3$ *esetén* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1. Mutasd meg, hogy egy $2n+1$ elemű halmaz páratlan elemszámú részhalmazainak a száma 2^{2n}.
2. Hány olyan 10 hosszú karaktersorozat készíthető a (26 betűből álló) angol ábécé nagybetűiből, mely tartalmaz A-t, B-t és C-t is? *Tehát például a MATEMATBSC egy ilyen karaktersorozat.*
3. Egy szabályos 400-szög csúcsait megszíneztük úgy, hogy 99 kék színű és 301 pedig piros. Mutasd meg, hogy létezik olyan négyzet, melynek csúcsai a 400-szög csúcsai közül kerülnek ki és mind a négy csúcs azonos színű.
4. Mutasd meg, hogy tetszőleges n pozitív egész esetén
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \left(4^k(-2)^{n-k} - 1\right) \right) = 0.$$
5. Legyen X egy n elemű halmaz. Hányféleképpen választhatjuk ki $A, B \subseteq X$ nem feltétlenül különböző részhalmazait X-nek úgy, hogy $A \cup B = X$?
6. Bizonyítsd be, hogy ha egy 15 csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának foka 8 vagy 9, akkor vagy van legalább 8 kilencedfokú, vagy van legalább 9 nyolcadfokú csúcs.
7. Gábor kedvenc $G_1, G_2, \ldots$ sorozatáról elárulta, hogy $G_1 = x$, $G_2 = 1 + x$, továbbá $n \geq 3$ esetén $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$. Sőt még azt is elmondta, hogy $G_{100} = F_{102}$. Határozd meg x összes lehetséges értékét.