Diszkrét Matematika – 2022/2023-1
VII. gyakorlat

1. (**3.9**) Legyen $f \in \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$ n-változós polinom, melynek foka $n(p-1)$, ahol p prím. Legyen

$$\int f = \sum_{\underline{a} \in \mathbb{F}_p^n} f(\underline{a}).$$

Mutasd meg, hogy $\int f$ csak azon tagoktól függ amelyben minden kitevő $(p-1)$.

2. (**3.10**) Legyen $k = \frac{p-1}{2}$. Mutasd meg, hogy tetszőleges $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{F}_p$ esetén létezik $\mathbb{F}_p^*$-nak egy $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_k, b_k$ permutációja, hogy $d_i = a_i - b_i$. (Segítség: a 3.9-es feladatot használva, mutasd meg, hogy az integrált elég $d_i \equiv 1$-re kiszámolni, mutasd meg, hogy az integrál nem 0.)

3. (**3.16**) A $H_1, H_2, \ldots, H_k$ síkok lefedik a $[0, 1, 2, \ldots, n]^3$ kocka összes rácspontját, kivéve a $(0, 0, 0)$ csúcsot. Mutasd meg, hogy $k \geq 3n$.

4. (**5.3**) Legyen G és H két gráf n csúcson. Mutasd meg, hogy van G-nek olyan K részgráfja, amely izomorf a H egy részgráfjával és legalább $\frac{e(G)e(H)}{\binom{n}{2}}$ éle van.

5. (**5.5**) Egy teniszversenyen n ember indult, mindenki mindenkivel játszott egyszer. A verseny végeredményét *k-jónak* hívjuk, ha tetszőleges k emberhez van olyan versenyző, aki mindegyiket legyőzte. Mutasd meg, hogy adott k esetén létezik olyan $n_0(k)$, hogy $n \geq n_0(k)$ esetén van *k-jó* verseny.

6. (**5.6**) Bizonyítsd be, hogy tetszőleges n-re van olyan tournament, amelynek legalább $\frac{n!}{2^{n-1}}$ Hamilton-útja van.