Diszkrét Matematika – 2022/2023-1
IV. gyakorlat

1. Legyen a G gráf erősen reguláris (n, d, a, b) paraméterekkel. Mutasd meg, hogy G komplementere is erősen reguláris. Mik a paraméterei?

2. (**4.31**) A Paley-gráfot a következőképpen definiáljuk. Legyen p egy $4k+1$ alakú prím. A Paley-gráf csúcshalmaza $\mathbb{Z}_p$, és $a, b \in \mathbb{Z}_p$ csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha $a-b$ négyzetszám $\mathbb{Z}_p$-ben. Mik a Paley-gráf sajátértékei?

3. (**4.32**) Legyen a G gráf erősen reguláris (n, d, a, b) paraméterekkel. Legyen $d > \lambda_+ > \lambda_-$ a G gráf három különböző sajátértéke. Mutasd meg, hogy

$$(d-\lambda_+)(d-\lambda_-) = n \cdot b.$$

4. (**4.33**) Legyen a G gráf erősen reguláris (n, d, a, b) paraméterekkel. Mutasd meg, hogy a G gráf vagy konferenciagráf, azaz olyan erősen reguláris gráf, melynek paraméterei $(4t+1, 2t, t-1, t)$ valamilyen t-re, vagy minden sajátértéke egész szám.

5. (**4.15**) Legyen G egy n csúcsú, m élű gráf. Legyen L_G a G gráf élgráfja (csúcsok a G élei és él vezet kettő között, ha volt közös csúcsuk G-ben). Legyenek L_G sajátértékei $\lambda_1(L_G) \geq \cdots \geq \lambda_m(L_G)$. Bizonyítsd be, hogy $\lambda_m(L_G) \geq -2$ és ha $m > n$, akkor egyenlőség áll fenn.