

Diszkrét Matematika – 2022/2023-1

III. gyakorlat

- (4.16a)** A G gráf adjacenciamátrixának sajátértékei $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$. Mik annak a $G(k)$ gráfnak a sajátértékei, melyet úgy kapunk, hogy G minden csúcsát helyettesítünk egy k méretű független halmazzal és két kupac között behúzzunk minden élet pontosan akkor ha eredetileg volt él a két csúcs között?
- (4.18)** Adottak a G_1 és G_2 gráfok sajátértékei. Mik a $G_1 \times G_2$ gráf sajátértékei, ahol a $G_1 \times G_2$ gráfot a következőképpen definiáljuk: a csúcshalmaz $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ és az (u_1, v_1) és (u_2, v_2) csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $(u_1, u_2) \in E(G_1)$ és $(v_1, v_2) \in E(G_2)$?
- (4.19)** Adottak a G_1 és G_2 gráfok sajátértékei. Mik a $G_1 \star G_2$ gráf sajátértékei, ahol a $G_1 \star G_2$ gráfot a következőképpen definiáljuk: a csúcshalmaz $V(G_1 \star G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ és az (u_1, v_1) és (u_2, v_2) csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha minden koordinátára igaz, hogy ott vagy megegyeznek, vagy össze vannak kötve. (hurokéleket nem engedünk meg)
- (4.29)** Legyen n_+ , n_- a G gráf nemnegatív, illetve nempozitív sajátértékeinek a száma. Legyen $\alpha(G)$ a legnagyobb független halmazának mérete. Mutasd meg, hogy

$$\alpha(G) \leq \min\{n_+, n_-\}.$$

- (4.29)** Mutasd meg, hogy ha H egy feszített részgráfja G -nek, akkor a legkisebb sajátértéke H -nak legalább olyan nagy, mint G legkisebb sajátértéke! Igaz-e ez akkor is, ha H tetszőleges részgráfja G -nek?