Diszkrét Matematika – 2022/2023-1
X. gyakorlat

Emlékeztető:

- $\left\{ n \atop k \right\}$: azt a számot jelöli ahányféleképpen az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt felbonthatjuk pontosan k darab nemüres halmazra

- $\left[n \atop k \right]$: azt a számot jelöli ahányféle permutációja van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, melyben pontosan k darab ciklus található.

---

1. (**2.41**) **a)** Legyen $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Mi lesz $\frac{F(x)}{1-x}$?
b) Mi a hatványsora $\frac{1}{(1-x)^n}$-nek?
c) Hasonlítsd össze az x^r együtthatóit $\frac{1}{(1-x)^{n+m}} = \frac{1}{(1-x)^n}\frac{1}{(1-x)^m}$-ben. Milyen azonosság következik ebből?

2. (**2.40**) Generátorfüggvényeket használva igazoljuk a következő azonosságot:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

3. (**2.46**) Mi a kapcsolat az (a_n) és (b_n) sorozatok között, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{1-x^k}?$$

4. (**2.80**) Mutasd meg, hogy

$$\left[n \atop k \right] = \left[n-1 \atop k-1 \right] + (n-1)\left[n-1 \atop k \right].$$

5. (**2.82**) Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \left[n \atop k \right] x^k = x(x+1)\ldots(x+n-1).$$

6. (**2.91**) Bizonyítsd be, hogy

$$\left\{ n+1 \atop m+1 \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ k \atop m \right\}.$$

7. (**2.92**) Jelölje $t(n,k)$ ahányféleképpen fel lehet bontani az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt k nemüres halmazra úgy, hogy két szomszédos elem ne kerüljön egy halmazba. Mutasd meg, hogy $t(n,k) = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$.