**Algoritmuselmélet** **2. gyakorlat** **2022. szeptember 21.**

Rekurziók megoldásához hasznos tudni a Mester-tételt:

Ha $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ , ahol $a \geq 1$ és $b > 1$, valamint $T(x) > 0$ konstans, ha $0 < x \leq 1$ és $f(n)$ pozitív, akkor

- $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, ha $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$
- $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$, ha $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$
- $T(n) = \Theta(f(n))$, ha $af(n/b) \leq cf(n)$ valamilyen $c < 1$ konstansra, ha n nagy (Ez teljesül például ha $f(n) = C(n^{\log_b a + \varepsilon})$)

(Valójában persze T csak egész számokon van többnyire értelmezve és a rekurzik definíciójában egész részek is szoktak szerepelni, de ezeket felül vagy alul becsűlve az $f$ apró növelésével gyakorlatilag mindig ilyen formára hozhatjuk a képletunket.)

1. Alkalmazható-e a Mester tétel az alábbi rekurziókra? Ha igen, milyen eredményt ad?
   **a)** $E(n) = 9E(n/3) + n$,
   **b)** $F(n) = F(2n/3) + 1$,
   **c)** $G(n) = 3G(n/4) + n \log n$
   **d)** $H(n) = 2H(n/2) + n \log n$
2. Adott két $n$ hosszú rendezett tömb. Számoljuk ki ezen $2n$ elem mediánját $O(\log n)$ időben!
3. Adjunk hatékony algoritmust $n$ elem közül a 2 legnagyobb (vagy általában a $k$ legnagyobb) kiválasztására!
4. **a)** Ha egy tábla csokit véletlen helyen kettétörünk, mekkora a nagyobbik rész méretének várható értéke?
   **b)** Bizonyítsuk be, hogy a $k$-adik elem kiválasztás véletlen algoritmusának (quickselect) várható összehasonlítás-száma $\leq 4n$.
5. Egy olajvállalat olyan fővezetéket tervez, amelyik egy $n$ kutat működtető olajmezőt szel át keletről nyugat felé. Mindegyik kút északról vagy délről közvetlen csővel, a legrövidebb úton csatlakozik a fővezetékhez. A kutak $x$ és $y$ koordinátáit ismerve, adjunk $O(n)$ költségű algoritmust a fővezeték optimális helyének (amikor is a bekötő csövek hosszának az összege minimális) meghatározására! Feltehetjük, hogy az $x$, illetve az $y$ koordináták mind különbözők.
6. Adott különböző számoknak egy növekvően rendezett $A[1..n]$ tömbje. A tömb elemeit valaki megkeveri, de csak annyira, hogy minden egyes elem új helye az eredetitől legfeljebb $k$ távolságra esik. Adjunk $O(nlogk)$-s algoritmust az eredeti állapot helyreállítására!
7. Adott egy dobozban $n$ különböző méretű csavar, egy másik dobozban pedig a hozzájuk illő anyák. Sajnos sem a csavarokat nem tudjuk egymással összehasonlítani, sem az anyákat. Azt tudjuk csak kipróbálni, hogy egy csavar külső átmérője kisebb, nagyobb vagy egyenlő egy anya belső átmérőjénél (megpróbáljuk az anyát rácsavarni a csavarra). Adjunk az algoritmus összehasonlításokban mért költségének várható értékben minél hatékonyabb algoritmust!