

## Algoritmelmélet

### 10. gyakorlat

Adott fiúknak ( $F$ ) és lányoknak ( $L$ ) 1-1 osztálya. Minden csúcshoz hozzátartozik a másik osztálybeli elemek egy preferencialistája. A feladatokban tegyük fel, hogy ugyanannyi fiú van, mint lány, és a preferencialisták teljeseek (hacsak a feladat mást nem mond). Legyen  $M$  egy párosítás.  $M$  *stabil*, ha nincs *blokkoló él*, azaz olyan  $M$ -en kívüli él, mely mindkét végpontjánál előrébb van a preferencialistán mint az aktuális párja (vagy éppen nincs párja).

1. Igaz vagy hamis?

- (a) Egy maximális folyamban minden irányított körnek van olyan éle, ahol 0 a folyamérték.
- (b) Minden hálózathoz van olyan max. folyam, ahol bármely irányított kör egy élén 0 a folyamérték.
- (c) Ha minden kapacitás különböző, akkor a maximális folyam egyértelmű.
- (d) Ha az összes kapacitást megszorozzuk egy  $\lambda > 0$  konstanssal, a minimális vágás ugyanaz marad.
- (e) Ha az összes kapacitáshoz hozzáadunk egy  $\lambda > 0$  konstans, a minimális vágás ugyanaz marad.
- (f) Ha az összes kapacitáshoz hozzáadunk egy  $\lambda > 0$  konstans, a max. folyam  $\lambda$  többszörösével nő.
- (g) Ha a hálózat nem tartalmaz irányított kört, akkor a maradékhálózat sem tartalmazhat.

2. Általánosítsuk a maximális folyam feladatot úgy, hogy most  $S \subseteq V$ -ből  $T \subseteq V$ -be ( $S \cap T = \emptyset$ ) keressük a maximális folyamat. Vezessük vissza hatékonyan az eredeti feladatra!

3. Egy másik általánosítás ha a csúcsoknak is van kapacitása. Mutassunk hatékony visszavezetést az eredeti problémára.

4. A hálózat egy  $e$  élét kritikusnak nevezzük, ha az él kapacitását csökkentve a hálózat maximális folyamának értéke is csökkenni fog. Módosítsuk úgy a Ford-Fulkerson algoritmust, hogy egy kritikus élt is megadjon!

5. Bizonyítsuk be, hogy a Gale-Shapley algoritmus minden fiúhoz a számára szóba jövő lányok közül a neki legjobban tetszőt párosítja, azaz *fiú-optimalis*! (Egy fiú számára egy lány akkor jön szóba, ha van olyan stabil párosítás, amelyben a fiú és a lány egy párt alkotnak.)

6. Bizonyítsuk be, hogy a Gale-Shapley algoritmus minden lánynak a számára szóba jövő fiúk közül a neki legkevésbé tetszőt párosítja, azaz *lány-pesszimális*!

7. (a) Lehetséges-e, hogy egy stabil párosításban mindenki számára a második legjobb pár van hozzárendelve?  
(b) Ha igen, a Gale-Shapley algoritmus adhat-e ilyen párosítást eredményül?

8.  $n$  lány és  $n$  fiú esetén adjunk meg olyan preferencialistákat, ahol legalább exponenciális sok stabil párosítás van.