Diszkrét Matematika – 2022/2023-1
VIII. gyakorlat

1. (**5.8**) Legyenek a G izolált csúcsot nem tartalmazó gráf csúcsainak fokai $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Legyen $\eta(G)$ a G gráf legnagyobb olyan csúcshalmazának mérete, amely körmentes részgráfot feszít. Mutasd meg, hogy

$$\eta(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{d_i + 1}.$$

2. (**5.9**) Mutasd meg, hogy n pozitív egész szám közül mindig kiválasztható $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, melyek között az $a_1 + a_2 = a_3$ egyenletnek nincs megoldása.

3. (**5.12**) Legyen $f(m)$ a legnagyobb olyan szám, amelyre teljesül, hogy bárhogyan adunk meg $A_1, A_2, \ldots, A_m$ halmazokat, van közöttük $f(m)$ darab, hogy a kiválasztott halmazok között nincs megoldása a $B_1 \cup B_2 = B_3$ (B_1, B_2, B_3 különböző) halmazegyenletnek. Mutasd meg, hogy $f(m) \geq \frac{\sqrt{m}}{2}$.

4. (**5.14**) Legyen H k-uniform hipergráf n csúcson, m éllel. Legyen $\tau(H)$ a H lefogási száma: $\tau(H) = \min\{|S| \mid |S \cap e| \neq 0 \forall e \in E(H)\}$. Mutasd meg, hogy $k > 1$ esetén tetszőleges $\alpha > 0$-ra

$$\tau(H) \leq n \frac{\alpha \log k}{k} + \frac{m}{k^{\alpha}}.$$