Diszkrét Matematika – 2022/2023-1
VI. gyakorlat

1. (**4.45**) Hány feszítőfája van annak a gráfnak, amit úgy kapunk, hogy egy K_n teljes gráfból elhagyjuk egy K_k teljes gráf élhalmazát?

2. (**4.50**) Legyen $L(G, x)$ az n csúcsú G gráf Laplace-mátrixának karakterisztikus polinomja. Mutasd meg, hogy $\overline{G}$ feszítőfáinak száma $\frac{1}{n^2}L(G, n)$.

3. (**4.51**) Bizonyítsd be, hogy $\det(L(G)+xJ) = n^2\tau(G)x$. (ahol $\tau(G)$ most is a G gráf feszítőfáinak számát jelöli)

4. (**3.8**) Legyenek $n \geq 1$, $K \geq 0$ egészek. Legyen továbbá $h \in \mathbb{F}_p(t_1, \ldots, t_n)$ polinom. Tegyük fel, hogy az $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{F}_p$ halmazokra teljesül, hogy $\sum_{i=1}^{n} |A_i| = K + n + \deg(h)$. Tegyük fel még, hogy a $(t_1 + \cdots + t_n)^K h(t_1, \ldots, t_n)$ polinomban a $t_1^{|A_1|-1} \ldots t_n^{|A_n|-1}$ együtthatója nem 0. Mutasd meg, hogy ekkor

$$|\{a_1 + \cdots + a_n \mid a_i \in A_i (1 \leq i \leq n); h(a_1, \ldots, a_n) \neq 0\}| \geq K + 1.$$

5. (**3.12**) Legyen $\mathbb{F}$ tetszőleges test és A egy $n \times n$-es mátrix $\mathbb{F}$ felett. Tegyük fel, hogy A permanense nem 0. Mutasd meg, hogy ekkor tetszőleges $\underline{b} \in \mathbb{F}^n$ vektorra és $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{F}$ halmazokra, melyekre $|S_i| = 2$ minden i-re, létezik egy olyan $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ vektor, hogy $A\underline{x}$ minden koordinátájában különbözik a $\underline{b}$ vektortól.