

Diszkrét Matematika – 2020/2021-1

II. gyakorlat

1. (4.7) Jelölje A az n csúcsú G gráf adjacenciamátrixát. Mutassuk meg, hogy

$$\max_{\|\underline{x}\|=1} \underline{x}^T A \underline{x} = \lambda_1$$

$$\min_{\|\underline{x}\|=1} \underline{x}^T A \underline{x} = \lambda_n$$

2. (4.13) Jelölje $m_k(G)$ ahányféleképpen ki lehet választani G -nek k független élét ($n_0(G) = 1$). Bizonyítsd be, hogy egy T fa karakterisztikus polinomja

$$\det(xI - A) = \sum_{j=0}^{n/2} (-1)^j m_j(T) x^{n-2j}$$

3. (4.23) Legyen G spektrálsugara $\lambda(G)$, a G -beli csúcsok fokszámai d_1, \dots, d_n . Mutasd meg, hogy

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2} \leq \lambda(G).$$

4. (4.24) Legyen G_1 és G_2 két gráf azonos csúcshalmazon. Legyen G az a gráf, amelynek csúcshalmaza $V(G) = V(G_1) = V(G_2)$ és $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Legyen $\lambda(G_i)$ a G_i gráf spektrálsugara, azaz G_i legnagyobb sajátértéke. Bizonyítsd be, hogy

$$\lambda(G) \leq \lambda(G_1) + \lambda(G_2).$$