Algoritmuselmélet **4. gyakorlat** **2022. október 5.**

1. Létezik-e olyan szöveg melynek Huffman-kódolásában

   a) minden kódszó különböző hosszú?

   b) minden kódszó hossza 1 vagy 100?

2. Egy n elemű ábécé Lempel–Ziv–Welch-kódolása esetén legfeljebb hányszor fordulhat elő egy adott szám? (Az elméleti modellben, ahol a kódok a természetes számok.)

3. Van-e olyan n, amire n elemű ábécére az $1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., 2n, 2n$ valaminek a kódja?

4. Milyen hatékony az n. Fibonacci szám kiszámítása a következő rekurzív algoritmussal?

   FIB(n):

   if $n \leq 1$ then return(n)

   else return(FIB(n - 1)+FIB(n - 2))

   Ki tudnánk-e számítani hatékonyabban?

5. **a)** Adott egy $n \times n$-es sakktábla, és egy figura, amelyet a tábla alsó sorából kell eljuttatni a felső sorba úgy, hogy minden mezőről csak felfelé egyenesen vagy felfelé átlósan léphetünk. Ha az x mezőről (megengedett módon) az y mezőre lépünk, akkor $f(x, y) \geq 0$ forintot kapunk. Adjunk $O(n^2)$-es algoritmust egy olyan út megtalálására, amely mentén a lehető legtöbb pénzt gyűjthetjük be! Az alsó sor akármelyik mezőjéről indulhatunk, és a felső sor akármelyik mezőjére érkezhetünk.

   b) Játsszuk le az algoritmust, ha $n = 4, f(22, 31) = f(24, 33) = 4$ és $f(14, 23) = f(22, 33) = f(32, 43) = f(33, 43) = 2$, minden más esetben $f(x, y) = 1$. (ij az i. sor j. oszlopot jelenti, az 1. sorból indulunk a 4.-be.)

6. **a)** Adjunk $O(nm)$-es algoritmust az $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ és $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ sorozatok egy leghosszabb közös részsorozatának meghatározására! (Pl. $\{a, b, c\}$ közös részsorozata $\{x, x, a, x, b, x, x, x, c, x, x\}$-nek és $\{y, a, y, y, b, y, y, y, c\}$-nek.)

   b) Játsszuk le, ha $X = \{a, b, b, c, d\}$ és $Y = \{c, a, e, d, b, a\}$!

   c) Játsszuk le, ha $X = \{0, 1, 1, 0\}$ és $Y = \{1, 1, 0, 1, 0, 1\}$!

7. **a)** Adjunk $O(n^2)$-es algoritmust egy n elemű számsorozat leghosszabb monoton növekvő részsorozatának meghatározására!

   b) Játsszuk le a $\{0, 1, 1, 0, 2, 1\}$ sorozatra!

8. **a)** Egy házidolgozat n kérdésből áll, az i. kérdés megválaszolása m_i percbe telik és a helyes válaszért v_i pont jár ($m_i, v_i \in \mathbb{N}$). Az áhított érdemjegy eléréséhez legalább V pontot kell összegyűjteni ($V \in \mathbb{N}$). Kiválasztandó a kérdéseknek egy olyan részhalmaza $O(nV)$ időben, amelyek megválaszolásával a lehető legrövidebb idő alatt érhető el legalább V pont!

   b) Játsszuk le, ha $V = 6$ és a pontszám/idő párok rendre 1/3, 1/2, 2/4, 2/6, 3/7.

9. Hogyan keressünk hatékonyan egy csúcssúlyozott fában (negatívok is lehetnek a súlyok) maximális összsúlyú független csúcshalmazt?

10. **a)** Egy konvex sokszög minden átlójának adott egy súlya. Keressük meg azt a háromszögelést $O(n^3)$ időben, ahol a behúzott átlók összsúlya minimális!

    b) Játsszuk le, ha $n = 6$ és $w(1, 3) = 5$, $w(1, 4) = 2$, $w(1, 5) = 3$, $w(2, 4) = 3$, $w(2, 5) = 4$, $w(2, 6) = 4$, $w(3, 5) = 5$, $w(3, 6) = 1$, $w(4, 6) = 2$.

11. **a)** Hátizsák probléma (egész értékekkel): Egy kincses barlangból n darab, egyenként $w_i \in \mathbb{N}^+$ súlyú $v_i \in \mathbb{N}^+$ értékű ($1 \leq i \leq n$) tárgy közül hozzunk ki minél nagyobb összértéket a W kapacitású hátizsákunkban. Adjunk $O(nW)$-s algoritmust!

    b) Játsszuk le a Hátizsák problémát az 1/2, 3/5, 3/6, 4/7 súly/érték párokra.

12. **a)** Mátrixszorzás optimális zárójelezése. Adottak az $A_1, \ldots, A_n$ mátrixok, méretük $r_{i-1} \times r_i (1 \leq i \leq n)$. Adjunk $O(n^3)$-ös algoritmust a minimális műveletigény meghatározására, ha egy $a \times b$-es és egy $b \times c$-es mátrix szorzásának költsége abc. Az algoritmus adja vissza a zárójelezést is!

    b) Játsszuk le, ha $A_1, \ldots A_5$ mérete rendre $3 \times 5, 5 \times 2, 2 \times 4, 4 \times 4, 4 \times 2$.