Algoritmuselmélet
11. gyakorlat

1. Adjunk 2-approximációs algoritmust egy irányított gráf maximális méretű aciklikus részgráfjának megtalálására. Megengedett megoldások (mmo): aciklikus részgráfok.

2. A Steiner-fa feladat a következő: Egy gráf élein adott egy pozitív valós súlyfüggvény, továbbá adott a csúcsok egy T részhalmaza, amelyeket termináloknak nevezünk. A Steiner-fa egy olyan összefüggő részgráf, amely T összes csúcsát tartalmazza és az ilyen tulajdonságú részgráfok közül minimális összsúlyú. mmo: T összes csúcsát tartalmazó összefüggő részgráfok.
   (a) Mutassuk meg, hogy a Steiner-fa tényleg részfa és minden levele terminál.
   (b) Adjunk 2-approximációs algoritmust a Steiner-fa feladatra.

3. Egy G gráfra legyen $\tau(G) = \min\{\,|S| : S \subseteq V(G),\ \forall E \in E(G)\ S \cap E \neq \emptyset, \}$ a G csúcsfedési száma. Adjunk 2-approximációs algoritmust $\tau(G)$-re! (mmo: csúcsfedések)

4. A TSP (utazó ügynök probléma) bemenete egy teljes, pozitív valós számokkal élsúlyozott gráf, kimenete pedig a legrövidebb Hamilton-kör hossza. (mmo: súlyozott Hamilton körök)
   (a) Mutassuk meg, hogy ha P$\neq$NP, akkor TSP-nek semmilyen $g(n)$ függvényre se létezhet polinomiális $g(n)$-approximációja!
   (b) Metrikus gráfra (azaz olyan gráfra, ahol az élsúlyokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség) viszont van 2-approximáció! Keressünk ilyet egy minimális feszítőfából kiindulva!
   (c) Egy másik algoritmus metrikus TSP-re: Folyamatosan bővítünk egy kört. Ha aktuálisan $S \subseteq V$ a csúcshalmaza, mindig a legkisebb súlyú S és $V \setminus S$ közötti $\{x, y\}$ él $V \setminus S$-beli x végpontját szúrjuk be y után (számontartjuk a kör csúcsainak egy ciklikus sorrendjét). Bizonyítsuk be, hogy ez is 2-approximáció!
   (d) Legyen $X \subseteq V(G)$ egy teljes metrikus gráf páros elemszámú részhalmaza és M X-en egy minimális összsúlyú teljes párosítás $c(M)$ összsúllyal. Mutassuk meg, hogy $c(M) \leq c(H)/2$, ahol $c(H)$ a $V(G)$-n legkisebb összsúlyú H Hamilton-kör összsúlya!
   (e) Adjunk polinomiális (3/2)-approximációt metrikus TSP-re *(Christofides algoritmusa)* a (d) állítást felhasználva és egy olyan (amúgy létező) algoritmust meghívva, mely egy teljes, nemnegatív élsúlyú páros pontszámú irányítatlan gráfban polinom időben talál minimális összsúlyú teljes párosítást!

5. Ládapakolás (bin packing): c_i méretű csomagokat szeretnénk a lehető kevesebb 1-méretű ládába bepakolni. Tekintsük az alábbi közelítő algoritmusokat (mmo: ládapakolások). Next Fit: Mindig az aktuális ládába rakjuk a csomagot. Ha nem fér be, lezárjuk és újat nyitunk. First Fit: Mindig a legkisebb sorszámú ládába rakjuk a csomagot, ahova befér. First Fit Decreasing: Mint FF, de csökkenően rendezettek a súlyok.
   (a) Mutassuk meg, hogy NF legfeljebb $2 \times \text{OPT} - 1$ ládát használ és ez éles.
   (b) Mutassuk meg, hogy FF 2-approximációs algoritmus a ládapakolásra!
   (c) Mutassuk meg, hogy FF-nek van olyan bemenete, amelyik $(5/3) \times \text{OPT}$ ládát használ!
   (d) Mutassuk meg, hogy FFD-nek van olyan bemenete, amelyik $(11/9) \times \text{OPT}$ ládát használ!